



MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE

EAI PHC 1

SESSION 2019

**AGRÉGATION
CONCOURS INTERNE
ET CAER**

Section : PHYSIQUE CHIMIE

**COMPOSITION SUR LA PHYSIQUE
ET LE TRAITEMENT AUTOMATISÉ DE L'INFORMATION**

Durée : 5 heures

Calculatrice électronique de poche - y compris calculatrice programmable, alphanumérique ou à écran graphique – à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous devez le signaler très lisiblement sur votre copie, en proposer la correction et poursuivre l'épreuve en conséquence. De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, vous devez la (ou les) mentionner explicitement.

NB : Conformément au principe d'anonymat, votre copie ne doit comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé consiste notamment en la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de la signer ou de l'identifier.

Tournez la page S.V.P.

A

INFORMATION AUX CANDIDATS

Vous trouverez ci-après les codes nécessaires vous permettant de compléter les rubriques figurant en en-tête de votre copie.

Ces codes doivent être reportés sur chacune des copies que vous remettrez.

► **Concours interne de l'Agrégation de l'enseignement public :**

Concours	Section/option	Epreuve	Matière
EAI	1500C	101	0385

► **Concours interne du CAER / Agrégation de l'enseignement privé :**

Concours	Section/option	Epreuve	Matière
EAH	1500C	101	0385

Mesure de la constante de Boltzmann

Ce problème s'inscrit dans le contexte de la révision du système international d'unités (SI) lors de la 26^{ème} réunion de la Conférence générale des poids et mesures de l'automne 2018.

Tout comme l'unité de longueur, le mètre, redéfinie en 1983 à partir d'une constante fondamentale (la vitesse de la lumière dans le vide) dont la valeur a été figée, la communauté internationale de métrologie a cherché depuis une quinzaine d'années à redéfinir l'unité de température à partir d'une autre constante fondamentale : la constante de Boltzmann k_B . Pour que cela soit possible, il fallait que cette constante puisse être connue avec une précision relative meilleure que 10^{-6} . Ce problème s'intéresse au facteur de Boltzmann puis à différentes méthodes permettant de mesurer k_B .

Les questions de nature pédagogique sont identifiées par le symbole (QP). Elles représentent environ un quart du total des points attribués. Les candidats sont invités à y consacrer le temps nécessaire.

Les différentes parties I à IV sont largement indépendantes. Les grandeurs numériques utiles ainsi qu'un formulaire figurent dans l'annexe 1.

I. Facteur de Boltzmann.

1. Donner quelques éléments sur les apports de Ludwig Boltzmann à la physique ainsi que l'époque de ses travaux.
2. Qu'appelle-t-on agitation thermique ?
3. Énoncer avec concision le théorème d'équipartition de l'énergie.
4. On s'intéresse au cas particulier d'un gaz parfait monoatomique constitué de N particules indépendantes. Déterminer l'énergie cinétique moyenne $\langle \varepsilon_c \rangle$ d'une particule de masse m en fonction de k_B et de la température T puis établir que la vitesse quadratique moyenne v^* s'écrit :

$$v^* = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}.$$

En déduire que l'énergie interne U de ce système de N particules s'écrit : $U = \frac{3}{2} N k_B T$.

En utilisant la relation entre k_B , R et la constante d'Avogadro N_A , récrire l'énergie interne U en fonction de la constante des gaz parfaits R . Mesurer R est équivalent à mesurer k_B à condition que l'incertitude relative sur N_A soit meilleure que celle attendue sur R (ou k_B). Est-ce le cas pour les valeurs numériques figurant en annexe 1 ?

5. Déterminer la capacité thermique molaire à volume constant $C_{V,m}$ d'un gaz parfait monoatomique. Déduire de U et de l'équation d'état des gaz parfaits, l'enthalpie d'un gaz parfait constitué de N particules puis sa capacité thermique molaire à pression constante $C_{P,m}$. Conclure sur la valeur du rapport $\gamma = \frac{C_{P,m}}{C_{V,m}}$ pour un gaz parfait monoatomique.

A – Gaz parfait dans le champ de pesanteur

Le théorème d'équipartition de l'énergie est une conséquence directe de la description statistique d'un système à l'équilibre thermique avec un thermostat de température T .

On rappelle que dans le cas d'un système à l'équilibre thermique constitué de particules indépendantes, la probabilité pour une de ces particules d'être dans un état microscopique d'énergie E est proportionnelle au facteur de Boltzmann $\exp\left(-\frac{E}{k_B T}\right)$.

Pour modéliser la répartition en fonction de l'altitude d'un gaz parfait dans le champ de pesanteur terrestre, on envisage le cas très général d'un cylindre d'axe vertical, de section Σ et de hauteur h , contenant N particules de masse m . On note z l'altitude en prenant comme origine la base du cylindre et T la température.

6. Rappeler l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur $E_p(z)$ d'une particule de masse m à l'altitude z .
La probabilité $p(z) dz$ pour une particule de se trouver entre les altitudes z et $z + dz$ vaut alors :

$$p(z)dz = A \exp\left(-\frac{E_p(z)}{k_B T}\right) dz \text{ où } A \text{ est une constante de normalisation.}$$

Exprimer $dN(z)$ le nombre moyen de particules présentes dans le cylindre entre les altitudes z et $z + dz$ en utilisant le fait que le nombre total de particules dans le cylindre est fixé à N pour déterminer la constante A . En déduire l'expression de la densité particulaire (nombre de particules par unité de volume) $n(z)$.

7. La densité particulaire est fonction d'un rapport de deux énergies. Exprimer en électron-volt (eV) l'ordre de grandeur de $k_B T$ pour la température ambiante. À quelle altitude une molécule de diazote a-t-elle une énergie potentielle de pesanteur du même ordre de grandeur ?

Montrer que $n(z)$ s'exprime uniquement en fonction d'une hauteur caractéristique H et de la densité à l'altitude nulle n_0 : $n(z) = n_0 \exp\left(-\frac{z}{H}\right)$. On exprimera H en fonction de m , g , k_B et T puis n_0 en fonction de H , h , N et Σ .

Dans chacun des trois cas suivants $h \gg H$, $h \sim H$ et $h \ll H$, décrire qualitativement la répartition des particules dans le cylindre.

8. Le cas de l'atmosphère terrestre supposée isotherme est un cas particulier du cylindre de hauteur h , avec h tendant vers l'infini. Calculer la hauteur caractéristique H , pour une valeur de la température à préciser, en supposant que toutes les particules d'air sont identiques et que l'air est un gaz de masse molaire égale à $29 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$. Commenter la valeur obtenue.
9. (QP) Le ballon sonde.

Lors d'une séance d'accompagnement personnalisé en classe de Terminale S, une professeure propose plusieurs versions d'une même résolution de problème selon le niveau des élèves. La version « confirmé », destinée aux élèves en réussite, est disponible en annexe 2.

- Proposer une correction à destination des élèves.
- Quels sont les obstacles éventuels rencontrés par les élèves ?
- Quels éléments faut-il rajouter pour proposer une version du problème à destination des élèves éprouvant plus de difficultés au niveau du raisonnement ?

B – Émulsions dans le champ de pesanteur : expériences de Jean Perrin

Dans une série d'expériences célèbres, Jean Perrin a étudié l'équilibre de grains solides plus denses que l'eau en suspension dans l'eau. En effet, après agitation pour uniformiser le mélange, Jean Perrin constate que la répartition des grains, initialement à peu près uniforme, se modifie. Les couches inférieures du mélange deviennent plus riches en grains que les couches supérieures. Au bout d'un certain temps, un régime permanent est atteint dans lequel la concentration décroît avec la hauteur de façon analogue à la répartition observée pour un gaz dans le champ de pesanteur.

Les résultats précédents vont donc être généralisés à un système de N particules indépendantes sphériques de rayon a et de masse volumique ρ_g en suspension dans de l'eau de masse volumique ρ_e .

10. Déterminer l'expression de l'énergie potentielle $E_p(z)$ d'une particule solide soumise à son poids et à la poussée d'Archimède exercée par l'eau. z repère toujours l'altitude de la particule sur un axe vertical ascendant.
11. En déduire que la hauteur caractéristique H s'écrit : $H = \frac{3k_B T}{4\pi a^3(\rho_g - \rho_e)g}$.
12. Confrontation à l'expérience.

Dans son livre « Les atomes », Jean Perrin indique que lors d'expériences très soignées faites avec des grains de gomme-gutte (sorte de latex) de rayon $0,212 \mu\text{m}$ dans une cuve de profondeur $100 \mu\text{m}$, des comptages effectués au microscope en quatre plans horizontaux équidistants traversant la cuve aux niveaux : $5, 35, 65$ et $95 \mu\text{m}$ ont donné des concentrations respectivement proportionnelles aux nombres : $100, 47, 23$ et 12 .

Vérifier que ces résultats sont conformes à la répartition en altitude prédite en utilisant le facteur de Boltzmann. Estimer la valeur de H pour ces expériences.

Établissement du régime permanent.

Initialement, le mélange est à peu près uniforme et les grains, plus denses que l'eau, sont soumis au champ de pesanteur $\vec{g} = -g\vec{e}_z$ où \vec{e}_z est le vecteur unitaire sur un axe vertical ascendant ainsi qu'à la poussée d'Archimède et à une force de frottement que l'on supposera proportionnelle à la vitesse du grain : $\vec{F} = -f\vec{v}$.

13. Déterminer l'équation différentielle du mouvement pour une particule de masse m .

En déduire l'équation différentielle vérifiée par la composante verticale $v_z(t)$ de la vitesse de la particule puis l'expression générale de $v_z(t)$ en fonction de f , g , a , ρ_x et ρ_e et d'une constante d'intégration qu'on ne cherchera pas à déterminer.

14. Mettre en évidence un temps caractéristique τ dans l'expression de $v_z(t)$ et montrer que pour $t \gg \tau$, la vitesse atteint une valeur limite constante que l'on notera v_{lim} . Exprimer τ et v_{lim} en fonction de f , g , a , ρ_x et ρ_e .
15. On considère que la force de frottement est modélisée par une force de Stokes ce qui implique $f = 6\pi\eta a$ où η est la viscosité dynamique du fluide.

Montrer que $\tau = \frac{2\rho_e a^2}{9\eta}$ et $v_{\text{lim}} = \frac{2(\rho_e - \rho_g)a^2 g}{9\eta}$. Quel est le signe de v_{lim} ? Calculer τ et v_{lim} pour des particules de rayon $a = 0,212 \mu\text{m}$ et de masse volumique $\rho_x = 1,194 \times 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$. Conclure quant à la rapidité de l'établissement d'une vitesse de chute constante.

Une fois la répartition en altitude du régime permanent atteinte, le mouvement incessant des particules persiste. Jean Perrin l'exprime dans son livre « Les atomes » par la phrase : « La répartition de régime permanent se maintient par équilibre entre deux actions antagonistes, la pesanteur, qui tire sans cesse les grains vers le bas, et le mouvement brownien qui les éparpille sans cesse. On exprimera cette idée de façon précise en écrivant que, pour chaque tranche, le débit par diffusion vers les régions pauvres équilibre l'afflux dû à la pesanteur vers les régions riches. ». Dans la description mécanique précédente, v_{lim} est en fait la vitesse moyenne constante acquise par les particules selon l'axe vertical, la vitesse moyenne selon une direction horizontale quelconque étant nulle.

16. Soit $\vec{j}_c = j_c(z)\vec{e}_z$ le vecteur densité de courant particulaire de chute. Déterminer $j_c(z)$ en fonction de la densité particulaire $n(z)$ et de la vitesse v_{lim} .

17. On rappelle la loi de Fick reliant le vecteur densité de courant de diffusion \vec{j}_{df} au gradient de la densité particulaire : $\vec{j}_{df} = -D \frac{dn(z)}{dz} \vec{e}_z$ où D est le coefficient de diffusion des particules.

Préciser sa signification physique et donner la dimension de D .

18. Exploiter l'hypothèse de régime permanent pour obtenir l'équation différentielle vérifiée par $n(z)$. Montrer que sa solution est : $n(z) = n_0 e^{-\frac{v_{\text{lim}} z}{D}}$.
19. En déduire une relation entre le coefficient de diffusion D , a , η , k_B et T .
20. Discussion des ordres de grandeur pour les expériences de Jean Perrin.

Afin d'estimer le temps d'établissement t_p du régime permanent, on raisonne sur le fait que les particules situées initialement en haut du récipient parcourent en moyenne une distance $h - H$ avant l'obtention de la distribution d'équilibre. Calculer t_p . Jean Perrin indique que « la répartition de régime permanent est atteinte après quelques heures ». Est-ce cohérent avec le résultat obtenu ?

II. Expérience de Kappler : Agitation thermique d'un miroir

En 1931, Eugen Kappler dans un article de la revue « Annalen der Physik » a présenté ses résultats de mesure relatifs au mouvement brownien d'un miroir suspendu à un fil de torsion vertical. La position occupée par le miroir est repérée par l'angle θ entre la trace du miroir et un axe de référence S_0 dans le plan Π perpendiculaire à l'axe du fil Δ , tel qu'indiqué dans la figure 1. La position $\theta = 0$ correspond à une torsion nulle du fil. L'angle θ est mesuré en utilisant la réflexion sur le miroir d'un faisceau lumineux se propageant dans un plan perpendiculaire à Δ . L'ensemble est placé dans une enceinte contenant un gaz à la température T . On note C la constante de torsion du fil et I le moment d'inertie du miroir par rapport à l'axe Δ .

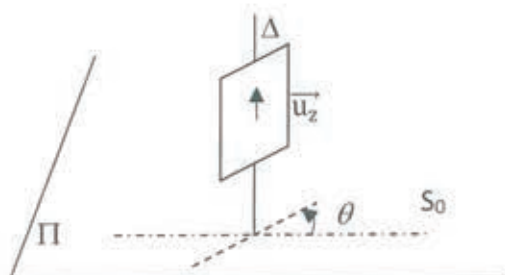


Figure 1 : Schéma de principe du dispositif utilisé par Kappler.

21. Méthode optique de mesure de l'angle de rotation du miroir.
L'angle θ est mesuré via l'angle φ que fait le faisceau lumineux réfléchi par rapport à une direction de référence choisie arbitrairement. On choisit ici de repérer φ par rapport à la normale \vec{n}_0 au miroir lorsque celui-ci est à l'équilibre. Faire un schéma des rayons incidents et réfléchis lorsque le miroir est à l'équilibre puis pour un angle θ quelconque. Quelle est la variation $d\varphi$ associée à une rotation $d\theta$ du miroir ?
22. Le moment des actions de rappel de torsion s'exprimant par $\vec{\Gamma} = -C\theta\vec{u}_2$, \vec{u}_2 étant le vecteur unitaire selon l'axe de rotation Δ du miroir, déterminer l'équation différentielle du mouvement du miroir en négligeant les frottements.
23. Établir que l'énergie potentielle de torsion du miroir s'écrit : $E_p(\theta) = \frac{1}{2}C\theta^2$.
24. En utilisant le facteur de Boltzmann, donner la probabilité $P(\theta)d\theta$ pour que le miroir fasse un angle compris entre θ et $\theta+d\theta$. On notera B la constante de normalisation de la loi de probabilité que l'on déterminera et on justifiera le fait que le domaine de variation de l'angle θ soit envisagé de $-\infty$ à $+\infty$.
25. Que vaut $\langle\theta\rangle$, moyenne de l'angle θ ? Calculer $\langle\theta^2\rangle$, moyenne du carré de l'angle.
Montrer que $\langle\theta^2\rangle = \frac{k_B T}{C}$. Commenter le résultat.
26. On trouve dans les tableaux 3 et 4 de l'article de Kappler les données suivantes :
 $T = 285,9 \text{ K}$; $\langle\theta^2\rangle = 4,183 \times 10^{-6}$; $C = 9,443 \times 10^{-9} \text{ g.cm}^2.\text{s}^{-2}$; $I = 4,552 \times 10^{-4} \text{ g.cm}^2$.
En déduire, avec le nombre de chiffres significatifs adapté, la valeur de la constante de Boltzmann k_B .
27. Le titre de l'article original de Kappler se réfère au mouvement brownien du miroir. En quoi ce mouvement est-il brownien ?

III. Une méthode optique pour mesurer la constante de Boltzmann

Dans les années 2000, une équipe du Laboratoire de Physique des Lasers à Villetaneuse a proposé une mesure de la constante de Boltzmann par une méthode de spectroscopie laser dont le principe est illustré dans la figure ci-dessous. Une vapeur moléculaire d'ammoniac est soumise au rayonnement d'un laser stabilisé dont la fréquence d'émission est balayée au voisinage de la fréquence d'absorption ν_0 d'une transition de l'ammoniac. L'absorption du rayonnement laser par les molécules d'ammoniac est enregistrée au cours du balayage en fréquence de l'émission laser.

Le dispositif expérimental est présenté figure 2 (figure extraite de l'article publié dans la revue Images de la physique en 2006).

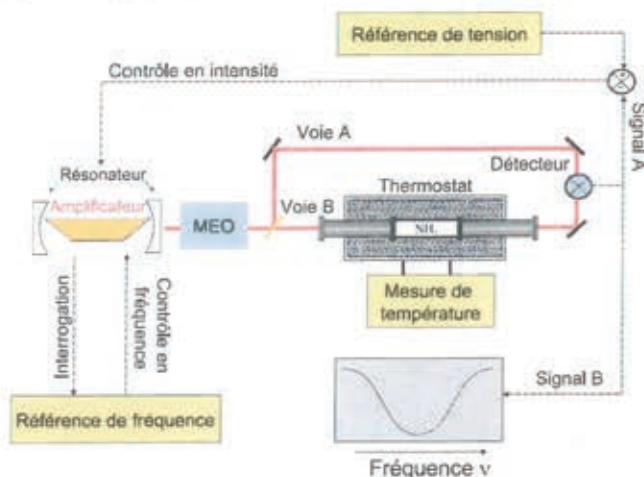


Figure 2. Dispositif expérimental
La fréquence du laser à CO₂ est contrôlée par l'asservissement en fréquence sur une raie de référence. Le balayage de la fréquence du rayonnement laser est réalisé grâce à un modulateur électro-optique (MEO). La voie A permet d'élaborer le signal utilisé pour contrôler l'intensité du laser pendant l'enregistrement des spectres d'absorption sur la voie B.

A – Questions autour de l'expérience décrite

28. La cellule contenant l'ammoniac est immergée dans une grande cuve contenant un mélange eau - glace. Justifier l'intérêt de ce dispositif comme thermostat. En déduire la température de l'ammoniac pendant l'expérience.
29. La stabilité de la température pendant l'expérience est contrôlée par des capteurs qui sont des résistances de platine. Expliquer le principe de fonctionnement de ces capteurs de température. Comment peut-on les étalonner ? Leur réponse est-elle linéaire ? Citer un autre capteur de température utilisé couramment au collège ou au lycée en indiquant son principe de fonctionnement.
30. La valeur de la fréquence associée à la transition de l'ammoniac étudiée est $\nu_0 = 28\,953,694$ GHz.
Quelle est la longueur d'onde dans le vide correspondant à cette fréquence ? Dans quel domaine du spectre électromagnétique le rayonnement associé est-il situé ?
31. (QP) Un enseignant de Terminale S se propose d'introduire le laser en utilisant la technique de la classe inversée. Il souhaite débiter sa séquence par une évaluation diagnostique portant sur les acquis de Première S. Des extraits des programmes de Première S et Terminale S, relatifs à la thématique étudiée, figurent en annexe 3.
Créer une évaluation diagnostique, d'une durée de 10 minutes au maximum, comportant trois questions.
Quelques élèves ne maîtrisent pas correctement l'utilisation du diagramme de niveaux d'énergie. Que proposez-vous pour remédier à cette situation ?
32. (QP) Après la phase diagnostique, le professeur demande aux élèves de réaliser une activité préparatoire à la séance sur le laser décrite dans l'annexe 4.
Répondre aux questions posées aux élèves.
Analyser la pratique de classe inversée : quels peuvent être les bénéfices pour les élèves ainsi que les points de vigilance ?

B – Forme de la raie d'absorption : contribution de l'élargissement Doppler thermique

Parmi les phénomènes contribuant à l'élargissement de la raie d'absorption moléculaire l'élargissement naturel lié à la durée de vie finie des niveaux d'énergie de la molécule est négligeable dans ce domaine de fréquence devant les deux autres sources d'élargissement, l'élargissement Doppler thermique et l'élargissement collisionnel.

La fréquence ν_0 est la fréquence de résonance de la molécule dans son référentiel propre, correspondant à la différence d'énergie des niveaux supérieur et inférieur de la transition moléculaire. On suppose que l'ammoniac absorbe uniquement à cette fréquence dans son référentiel propre. On suppose également que le laser est parfaitement monochromatique de fréquence ν et on notera v_x la projection du vecteur vitesse de la molécule selon l'axe Ox orienté dans le sens de propagation du rayonnement émis par le laser.

Lorsque la molécule de masse m est en mouvement dans le référentiel du laboratoire, par effet Doppler, elle perçoit le rayonnement laser à une fréquence $\nu_p = \nu(1 - v_x/c)$ à condition que $|v_x| \ll c$. On note N le nombre total de molécules d'ammoniac dans la cellule, n la densité moléculaire (nombre de molécules par unité de volume) et P la pression.

33. Déterminer la fréquence $\nu(v_x)$ du laser qui sera absorbée par les molécules dont la projection de la vitesse sur l'axe Ox vaut v_x en exploitant la relation $|v_x| \ll c$.
34. La cellule étant maintenue à une température T , le nombre de molécules dont la composante de la vitesse selon l'axe Ox est comprise entre v_x et $v_x + dv_x$ s'écrit :

$$dN_{v_x} = N \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2k_B T}\right) dv_x$$

En déduire dN_ν , le nombre de molécules absorbant le rayonnement laser de fréquence comprise entre ν et $\nu + d\nu$. Mettre dN_ν sous la forme : $dN_\nu = N G(\nu) d\nu$.

On appelle $G(\nu)$ le profil de la raie. Montrer que $G(\nu)$ s'exprime sous la forme d'une loi normale (cf. annexe 1) dont on donnera l'écart type σ en fonction de k_B , T , m , c et ν_0 .

35. Dans l'article paru dans Physical Review Letters, les auteurs extraient la « demi-largeur à $1/e$ » du profil de raie mesuré ; la « demi-largeur à $1/e$ » est associée à l'intervalle de fréquence ν tel que $G(\nu) \leq G_{\max}/e$ où G_{\max} désigne la valeur maximale et où $e = \exp(1)$.

En supposant que le profil de raie est purement un profil Doppler donc gaussien, relier la « demi-largeur à $1/e$ », notée Δ_D , à l'écart type σ obtenu à la question précédente.

Montrer que $\Delta_D = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{v^*}{c} \nu_0$ où v^* est la vitesse quadratique moyenne de l'ammoniac.

36. (QP) Effet Doppler-Fizeau.
Après avoir abordé l'effet Doppler dans le cas des ondes sonores, un professeur de Terminale S souhaite faire travailler ses élèves sur l'effet Doppler-Fizeau. Les documents dont il dispose figurent en annexe 5.

À l'aide des documents proposés, construire une activité permettant de mettre en œuvre la compétence exigible du programme : « Utiliser des données spectrales et un logiciel de traitement d'images pour illustrer l'utilisation de l'effet Doppler comme moyen d'investigation en astrophysique ».

Proposer un corrigé de cette activité.

C – Forme de la raie d'absorption : contribution de l'élargissement collisionnel

Les collisions vont modifier l'état quantique de la molécule et vont donc contribuer à élargir le profil spectral. La conséquence est un profil de raie lorentzien de largeur $\Gamma = 1/\tau$ où τ est la durée moyenne entre deux collisions ; le nombre dN_ν de molécules absorbant le rayonnement laser de fréquence comprise entre ν et $\nu + d\nu$ s'écrit alors $dN_\nu = N L(\nu) d\nu$ avec $L(\nu) = \frac{\Gamma}{\pi[(\nu - \nu_0)^2 + \Gamma^2]}$.

37. Pour déterminer τ , on évalue dans un premier temps, à l'aide d'un modèle très simple, la distance moyenne (ou libre parcours moyen) ℓ parcourue par une molécule entre deux chocs successifs. Les molécules sont modélisées par des sphères dures de rayon a .

Évaluer la distance moyenne δ entre molécules en fonction de n , la densité moléculaire. On raisonnera sur le volume moyen offert à chaque molécule.

Déterminer une expression approchée du libre parcours moyen en supposant que le volume couvert par le déplacement d'une molécule entre deux chocs est de l'ordre de grandeur du volume moyen offert à chaque molécule. Montrer que ces hypothèses simplificatrices conduisent à : $\ell = \frac{1}{n4\pi a^2}$.

38. En déduire la durée τ , puis la largeur Γ . On assimilera la vitesse relative des molécules à la vitesse quadratique moyenne v^* et on exprimera Γ en fonction de P , k_B , T , a et v^* .

39. Déterminer les ordres de grandeur de δ et ℓ pour un gaz dans des conditions habituelles de température et de pression puis pour un gaz dont la température est inchangée mais pour lequel la pression est celle d'un vide primaire. Quelle inégalité a-t-on dans les deux cas entre δ et ℓ ? Quel sens physique peut-on donner à la situation pour laquelle le libre parcours moyen ℓ est supérieur à la dimension de la cellule contenant le gaz?

Dans cette question le (la) candidat(e) doit prendre des initiatives quant aux hypothèses utilisées et au choix des valeurs numériques.

D – Profil spectral complet et détermination de la constante de Boltzmann

La prise en compte des deux sources d'élargissement, Doppler et collisionnel, conduit à un profil spectral qui est la convolution d'une fonction gaussienne par une fonction lorentzienne.

On cherche à déterminer dans quel domaine de pression, on peut considérer l'élargissement collisionnel comme une perturbation du profil gaussien (Doppler) et ainsi écrire la largeur mesurée comme étant égale à la largeur Doppler plus un terme proportionnel à la pression (via la largeur Γ) :

$$\Delta\nu = \Delta_D + \alpha\Gamma \text{ où } \alpha \text{ est une constante multiplicative.}$$

40. On se place donc dans le cas où $\Delta_D \gg \Gamma$. Exploiter cette relation en simplifiant les termes qui ont même ordre de grandeur pour obtenir une condition littérale sur la pression P .

41. Dans les conditions de l'expérience réalisée, jusqu'à quelle pression limite peut-on raisonnablement être dans le cas $\Delta_D \gg \Gamma$?

42. La figure 3, extraite de l'article de Daussy *et al.* paru dans la revue Physical Review Letters en 1998, donne les demi-largeurs à 1/e extraites des mesures en fonction de la pression.

L'approximation $\Delta\nu = \Delta_D + \alpha\Gamma$ est-elle justifiée expérimentalement ?

Déterminer k_B en utilisant la figure 3.

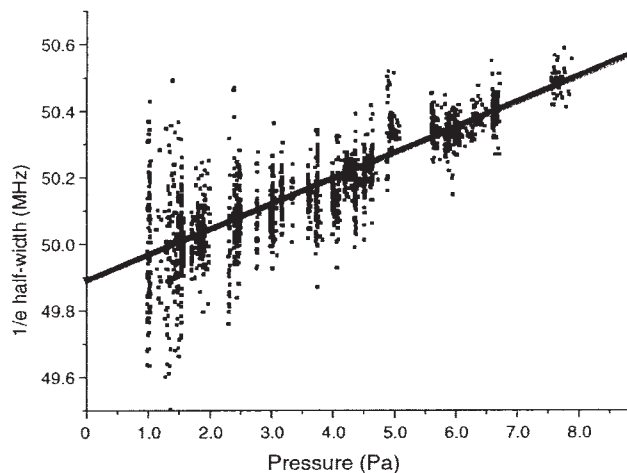


Figure 3 : demi-largeurs à 1/e de la raie d'absorption étudiée en fonction de la pression du gaz et régression linéaire.

IV. Une méthode acoustique pour mesurer la constante de Boltzmann

Cette méthode nommée « Acoustic Gas Thermometry » a pour principe la mesure de la vitesse du son dans un gaz rare placé dans une cavité résonnante. Ce principe est illustré dans le cas simple d'une cavité cylindrique.

A – Établissement de l'équation d'onde dans le cadre de l'approximation acoustique

On s'intéresse à la propagation d'ondes acoustiques dans un fluide compressible contenu dans un cylindre illimité de section constante S_0 et d'axe de révolution horizontal Ox tel que présenté figure 4.

Au repos, l'état du fluide est décrit par la pression uniforme P_0 et sa masse volumique μ_0 . En présence d'une onde sonore, le milieu se déforme, et la pression et la masse volumique ne sont plus uniformes mais décrites par les relations suivantes :

$$P(x,t) = P_0 + p_1(x,t)$$

$$\mu(x,t) = \mu_0 + \mu_1(x,t)$$

On s'intéresse aux mouvements de faible amplitude du fluide parallèlement à l'axe Ox . Pour obtenir l'équation du mouvement, le système considéré est une tranche de fluide, de masse dm constante, comprise entre les abscisses x et $x+dx$ lorsqu'elle est au repos, puis déplacée entre les abscisses $x + \xi(x,t)$ et $x + dx + \xi(x+dx, t)$ à un instant t quelconque.

On notera $\vec{v} = \frac{\partial \xi}{\partial t} \vec{e}_x$ la vitesse de la tranche où \vec{e}_x est un vecteur unitaire selon l'axe Ox .

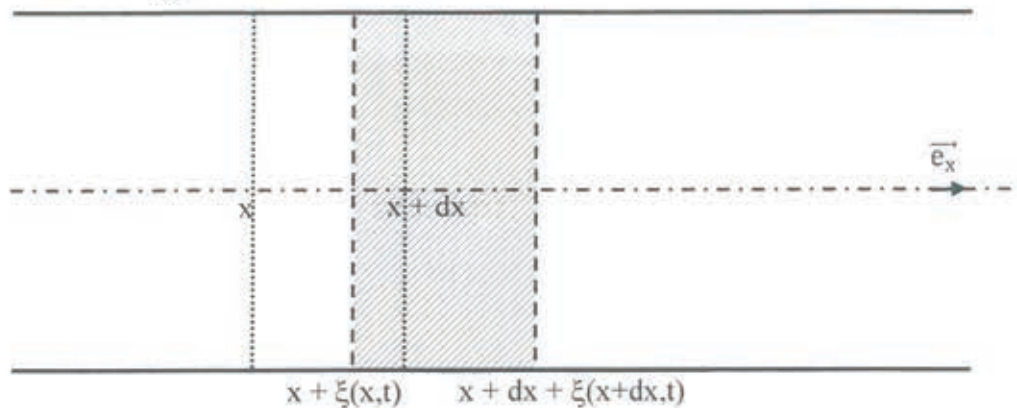


Figure 4 : portion du cylindre illimité avec représentation d'une tranche au repos entre les abscisses x et $x + dx$ déplacée à un instant t quelconque entre les abscisses $x + \xi(x,t)$ et $x + dx + \xi(x+dx,t)$.

43. Exprimer la masse dm de la tranche en fonction de S_0 , μ_0 et dx .
44. Appliquer la relation fondamentale de la dynamique à la tranche de fluide en négligeant le poids.

En utilisant l'approximation $\left| \frac{\partial \xi}{\partial x} \right| \ll 1$, montrer que cette relation conduit à l'équation :

$$\mu_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = - \frac{\partial p_1}{\partial x} .$$

45. On utilise souvent l'hypothèse que les mouvements du fluide se font sans transferts thermiques car ces mouvements sont « rapides ». On se propose de justifier cette hypothèse par une étude d'ordres de grandeur.

Donner les ordres de grandeur de la célérité du son dans l'air ainsi que la gamme de longueur d'onde correspondant au domaine des sons audibles.

La diffusivité thermique de l'air vaut environ $D_{th} = 2 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$. Comparer la durée caractéristique de diffusion thermique sur une distance égale à une longueur d'onde du domaine des sons audibles à la durée de propagation de la déformation du fluide sur cette même longueur. Conclure.

46. On suppose donc un comportement adiabatique réversible du fluide contenu dans la tranche considérée et on note χ_S le coefficient de compressibilité isentropique : $\chi_S = - \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_S$ que l'on suppose constant au cours des transformations envisagées.

Montrer que la surpression est reliée à χ_S par : $p_1 = -\frac{1}{\chi_S} \frac{\partial \xi}{\partial x}$.

47. En déduire l'équation de propagation vérifiée par l'élongation sous la forme :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c_s^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}.$$

Exprimer c_s en fonction de χ_S et μ_0 et préciser ce que représente cette grandeur.

48. On se place dans le cas où le fluide est un gaz parfait.

Déterminer c_s en fonction de la température T , de la constante des gaz parfaits R , de la masse molaire M du gaz et de γ , avec $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ rapport des capacités thermiques massiques respectivement à pression et volume constant. On admettra au préalable que le produit PV^γ reste constant lors d'une transformation isentropique d'un gaz parfait pour lequel γ est supposé constant.

49. (QP) : Mesure de la vitesse du son.

En classe de 4^{ème}, un professeur de physique-chimie souhaite utiliser la relation liant distance, durée et vitesse pour déterminer la vitesse du son. Il propose aux élèves le protocole décrit en annexe 6, un enregistrement réalisé par des élèves y est également fourni. En parallèle, le professeur de mathématiques de la classe décide de travailler la notion de proportionnalité en prenant appui sur la situation proposée dans l'activité sur la mesure de la vitesse du son.

Des extraits des programmes de physique-chimie et de mathématiques du cycle 4 sont également disponibles en annexe 6.

Après avoir schématisé la situation, déterminer la vitesse du son dans l'air à partir de l'enregistrement réalisé par les élèves. Commenter le résultat obtenu.

Décrire le contenu d'une séance qui va suivre l'activité proposée de manière à ce que les élèves puissent travailler la compétence du programme de mathématiques « reconnaître une situation de proportionnalité » puis retrouvent la relation littérale entre vitesse, distance et durée. Cette séance donnera lieu à une co-animation entre le professeur de physique-chimie et le professeur de mathématiques.

Quels obstacles rencontrés par les élèves pourront être levés par ce travail coordonné entre les deux enseignants ?

B – Résonance d'une cavité cylindrique

On étudie dorénavant un tuyau de longueur L fermé en $x = 0$.

On recherche les ondes pouvant se propager dans le tuyau sous la forme d'une superposition d'une onde progressive monochromatique se propageant dans le sens des x positifs et d'une onde progressive monochromatique se propageant dans le sens contraire :

$$\xi(x,t) = A \cos(kx - \omega t) + B \cos(kx + \omega t) \text{ où } A \text{ et } B \text{ sont des coefficients réels.}$$

50. Déterminer la relation entre k et ω . Nommer ces grandeurs.
51. Quelle valeur doit prendre l'élongation en $x = 0$? Déterminer la relation induite sur les coefficients A et B .
52. En déduire que les solutions possibles pour un tuyau fermé en $x = 0$ sont de la forme :

$$\xi(x,t) = 2A \sin(kx) \sin(\omega t).$$

Comment appelle-t-on ce type d'ondes ?

53. On ferme également le tuyau en $x = L$. Quelle valeur doit prendre l'élongation en ce point ? En déduire que seules certaines fréquences, appelées fréquences propres du tuyau, sont possibles. Exprimer la fréquence f_p du mode p , p étant un entier naturel, en fonction de p , c_s et L . Interpréter qualitativement cette « quantification » des modes possibles.
54. On se place maintenant dans un régime d'oscillations forcées. Le tuyau est toujours fermé en $x = 0$ alors qu'en $x = L$, on impose une élongation de pulsation Ω : $\xi(L,t) = A_0 \sin(\Omega t)$. Comment peut-on imposer, en pratique, ce type de condition aux limites ?

Donner l'expression de l'élongation $\xi(x,t)$ de l'onde s'établissant dans le tuyau, une fois le régime forcé établi. En particulier, on exprimera l'amplitude $2A$ de cette onde en fonction de A_0 , Ω , c_s et L .

55. En déduire que l'amplitude $2A$ peut tendre vers l'infini quand les fréquences imposées prennent certaines valeurs. Comment appelle-t-on ce phénomène ? Comparer ces valeurs aux fréquences propres du tuyau fermé aux deux extrémités.
56. En pratique, on n'observe pas de mouvement d'amplitude infinie, pourquoi ?

C – Principe de la mesure de k_B dans une cavité cylindrique résonante

Dans l'article de Lin *et al.* paru dans la revue *Metrologia* en 2013, les auteurs ont mesuré la constante de Boltzmann en déterminant les fréquences de résonance d'une cavité cylindrique de longueur L remplie d'argon. La cavité est maintenue à la température du point triple de l'eau et des transducteurs piézoélectriques permettent d'émettre à une extrémité de la cavité une onde acoustique dont on fait varier la fréquence et à l'autre extrémité de la détecter.

57. Rappeler l'expression des fréquences de résonance de la cavité, correspondant à la modélisation unidimensionnelle développée dans les questions précédentes, en fonction de la vitesse du son, de L et d'un entier naturel p .
58. Exprimer la vitesse du son en fonction de la température T , de la masse molaire de l'argon M_{Ar} , de k_B et de la constante d'Avogadro N_A .
59. Montrer que la constante de Boltzmann s'obtient par : $k_B = \left(\frac{2f_p L}{p}\right)^2 \frac{3M_{Ar}}{5TN_A}$
60. La détermination de la constante de Boltzmann n'est pas immédiate. Il faut tenir compte d'un certain nombre de corrections, notamment de la viscosité du gaz et du fait que la vitesse du son dépend de la pression. Cependant, afin de comprendre le principe de la mesure, calculer les premières fréquences de résonance pour une cavité de longueur $L = 80$ mm et comparer au spectre enregistré par les auteurs de l'article présenté figure 5. Conclure.

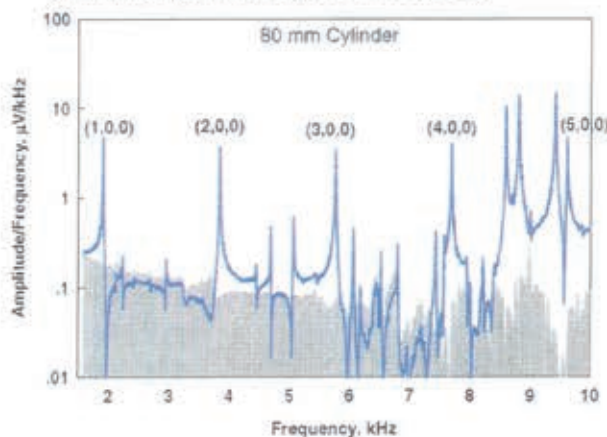


Figure 5 : Spectre (amplitude) du signal détecté quand le résonateur est sous vide (en gris) et quand il est rempli d'argon sous 150 kPa et 273,16 K

61. Proposer une explication à la présence, dans la figure 5, de 3 indices pour repérer les pics de résonance.

ANNEXE 1

Données et définitions

Vitesse de la lumière dans le vide : $c = 299\,792\,458 \text{ m.s}^{-1}$

Constante des gaz parfaits (valeur CODATA 2014): $R = 8,3144598(48) \text{ J. mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$

Constante de Boltzmann (valeur CODATA 2014): $k_B = 1,38064852(79) \times 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$

Constante d'Avogadro (valeur CODATA 2014) : $N_A = 6,022140857(74) \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

Intensité de la pesanteur : $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$

Electron volt : $1 \text{ eV} = 1,602 \times 10^{-19} \text{ J}$

Viscosité dynamique de l'eau à 20 °C : $\eta = 1,002 \times 10^{-3} \text{ Pa.s}$

Masse volumique de l'eau : $\rho_e = 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$

Masse molaire atomique de l'argon : $M_{Ar} = 39,95 \text{ g.mol}^{-1}$

Masse molaire moléculaire de l'ammoniac : $M_{amv} = 17,03 \text{ g.mol}^{-1}$

Masse molaire atomique de l'azote : $M_N = 14,01 \text{ g.mol}^{-1}$

Formulaire

1) Les intégrales $I_a(n)$, avec n entier naturel, sont définies par : $I_a(n) = \int_0^{+\infty} t^n e^{-at^2} dt$ avec $a > 0$.

$$I_a(0) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}; I_a(1) = \frac{1}{2a}$$

Les intégrales $I_a(n)$ vérifient la relation de récurrence : $I_a(n) = \frac{(n-1)}{2a} I_a(n-2)$ pour $n \geq 2$.

2) Loi normale d'espérance μ et d'écart type σ : $G(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$.

ANNEXE 2 : Résolution de problème

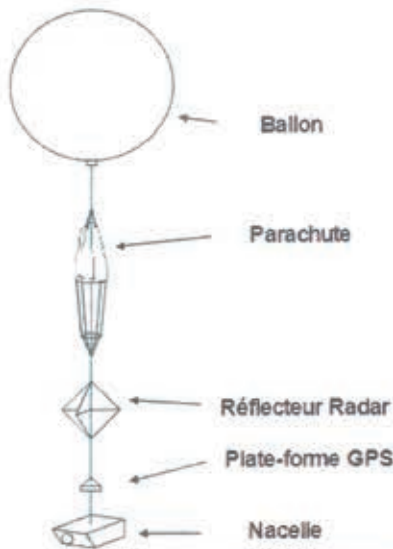
Énoncé de la résolution de problème en terminale S

Version « confirmé »

Un ballon-sonde est constitué d'un ballon en caoutchouc mince très élastique, gonflé à l'hélium ainsi que d'une nacelle attachée au ballon, contenant du matériel scientifique destiné à étudier la composition de l'atmosphère. Durant son ascension, le ballon grossit car la pression atmosphérique diminue. Sa paroi élastique finit par éclater à une altitude généralement comprise entre 20 et 30 kilomètres. Après éclatement, un petit parachute s'ouvre pour ramener la nacelle et son matériel au sol.

En utilisant les documents fournis, déterminer le nombre de bouteilles d'hélium nécessaire au décollage du ballon-sonde.

Document 1 :



Masse du ballon+ hélium+ accessoires : 5,3 kg.

Le volume des accessoires (parachute, réflecteur, GPS, nacelle) est négligeable par rapport au volume du ballon.

Pour gonfler le ballon, on utilisera des bouteilles d'hélium contenant chacune 15 L d'hélium à la pression de 180 bars.

http://www.garef.com/aero/aero_ballons06.htm

Document 2 : Loi de Boyle-Mariotte

À température constante, pour une quantité de matière donnée de gaz, le produit de la pression P par le volume V de ce gaz ne varie pas : $P \times V = \text{constante}$.

Document 3 : Poussée d'Archimède

L'air extérieur exerce sur le ballon une force verticale dirigée vers le haut dont l'intensité est donnée par :

$$F_A = \rho_{\text{air}} \times V \times g \text{ avec :}$$

- masse volumique de l'air : $\rho_{\text{air}} = 1,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$;
- volume du ballon : V en m^3 ;
- intensité de la pesanteur : $g = 9,81 \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}$.

ANNEXE 3 : Extraits des programmes de Première S et Terminale S

Extrait du programme de Première S

Extrait de l'annexe au Bulletin officiel spécial n° 9 du 30 septembre 2010

OBSERVER Couleurs et images	
<i>Comment l'œil fonctionne-t-il ? D'où vient la lumière colorée ? Comment créer de la couleur ?</i>	
Notions et contenus	Compétences attendues
Sources de lumière colorée	
Interaction lumière-matière : émission et absorption. Quantification des niveaux d'énergie de la matière. Modèle corpusculaire de la lumière : le photon. Énergie d'un photon. Relation $\Delta E = h\nu$ dans les échanges d'énergie.	Interpréter les échanges d'énergie entre lumière et matière à l'aide du modèle corpusculaire de la lumière. Connaître les relations $\lambda = c/\nu$ et $\Delta E = h\nu$ et les utiliser pour exploiter un diagramme de niveaux d'énergie.

Extrait du programme de Terminale S

Extrait de l'annexe au Bulletin officiel spécial n° 8 du 13 octobre 2011

Énergie, matière et rayonnement

Notions et contenus	Compétences exigibles
Transferts quantiques d'énergie Émission et absorption quantiques. Émission stimulée et amplification d'une onde lumineuse. Oscillateur optique : principe du laser.	Connaître le principe de l'émission stimulée et les principales propriétés du laser (directivité, monochromaticité, concentration spatiale et temporelle de l'énergie). <i>Mettre en œuvre un protocole expérimental utilisant un laser comme outil d'investigation ou pour transmettre de l'information.</i>

Transmettre et stocker de l'information

Notions et contenus	Compétences exigibles
Procédés physiques de transmission Propagation libre et propagation guidée. Transmission : - par câble ; - par fibre optique : notion de mode ; - transmission hertzienne. Débit binaire. Atténuations.	Exploiter des informations pour comparer les différents types de transmission. Caractériser une transmission numérique par son débit binaire. Évaluer l'affaiblissement d'un signal à l'aide du coefficient d'atténuation. <i>Mettre en œuvre un dispositif de transmission de données (câble, fibre optique).</i>
Stockage optique Écriture et lecture des données sur un disque optique. Capacités de stockage.	Expliquer le principe de la lecture par une approche interférentielle. Relier la capacité de stockage et son évolution au phénomène de diffraction.

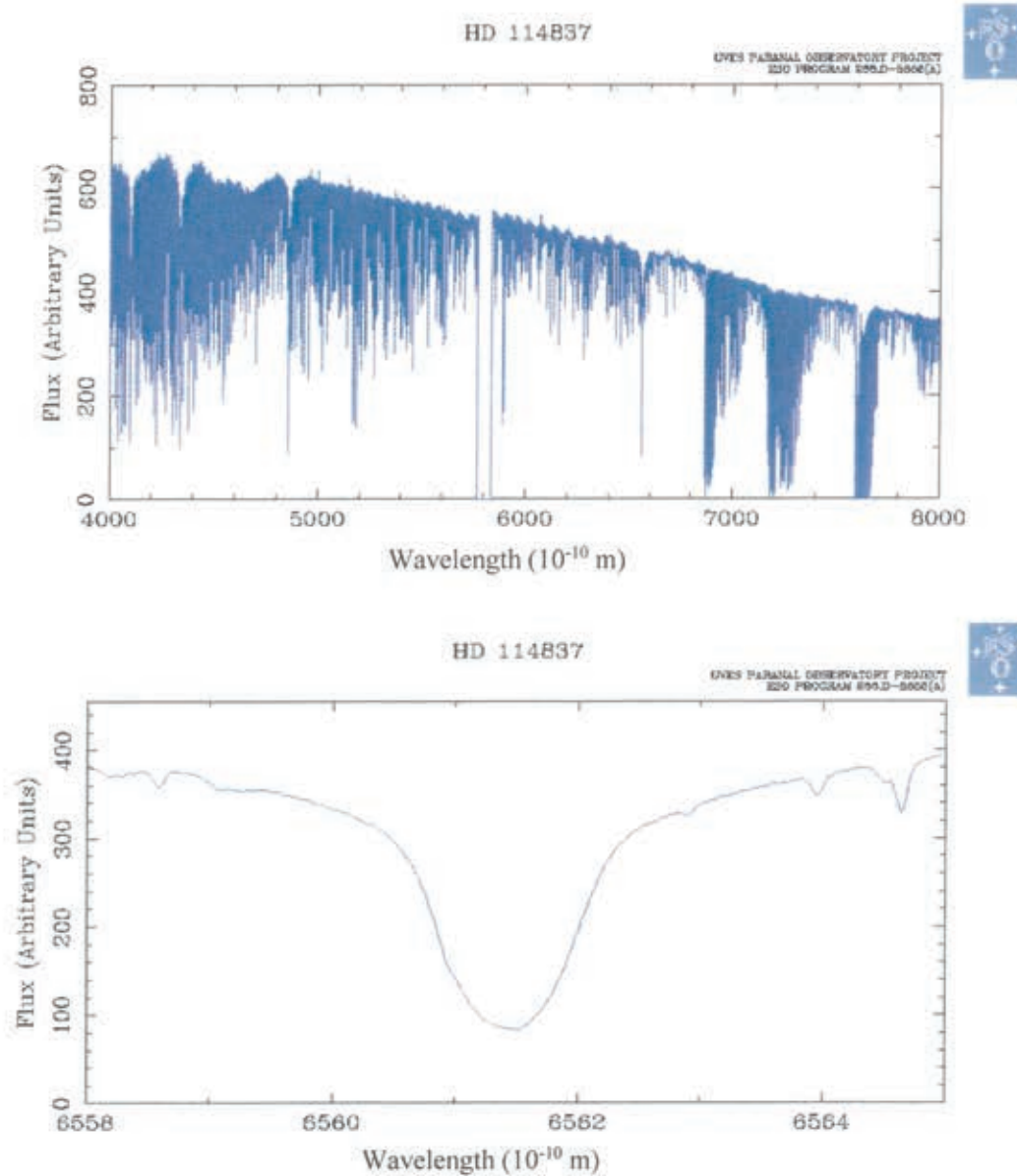
ANNEXE 4 : Activité à faire avant la séance en classe portant sur le laser

Visionnez le film de 9 minutes mis en ligne par le Centre National de la Recherche Scientifique à l'occasion des 50 ans du laser. Répondez aux questions qui suivent.

- a) Que signifie l'acronyme laser ?
- b) À quelle époque le laser a-t-il été découvert ?
- c) Citer au moins deux utilisations du laser.
- d) Donner deux exemples de laser.
- e) Que se passe-t-il lorsque des atomes sont dans un état excité ?
- f) Qu'est-ce que l'émission stimulée ?
- g) Qu'est-ce que le pompage optique ?
- h) Qu'est-ce qu'une femtoseconde ?
- j) Comment utiliser le laser dans le cadre de la transmission de l'information ?

ANNEXE 5 : Effet Doppler-Fizeau

La base de données de l'observatoire européen au Chili (ESO) permet d'obtenir le spectre d'une étoile connaissant son nom ainsi que de zoomer sur une zone donnée du spectre. Par exemple, pour l'étoile HD114837 :



Document 1 : Raies spectrales de l'atome d'hydrogène, principales raies de Balmer

Notations usuelles	Longueur d'onde dans le vide λ (10 ⁻¹⁰ m)	Couleur
H _{α}	6562,80	Rouge
H _{β}	4861,32	Bleu
H _{γ}	4340,46	Violet
H _{δ}	4101,73	Violet

Document 2 : Effet Doppler-Fizeau

L'étoile est en mouvement à la vitesse radiale v_x par rapport à la Terre donc la fréquence f_p perçue par un observateur terrestre est liée à la fréquence f émise par l'étoile par la relation :

$$f_p = \frac{f}{\left(1 + \frac{v_x}{c}\right)} \text{ à condition que } |v_x| \ll c.$$

c est la célérité de la lumière dans le vide soit $c = 3,00 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}$.

v_x est la projection de la vitesse de l'étoile sur la ligne de visée (joignant l'étoile à la Terre) et est comptée positivement quand l'étoile s'éloigne de la Terre.

Document 3 : Vitesse radiale tabulée de l'étoile HD114837

$$v_{\text{tabulée}} = -64 \text{ km.s}^{-1}$$

Document 4 : Extrait du programme de Terminale S

Extrait de l'annexe au Bulletin officiel spécial n° 8 du 13 octobre 2011

Mesures et incertitudes

Notions et contenus	Compétences expérimentales exigibles
Erreurs et notions associées	Identifier les différentes sources d'erreur (de limites à la précision) lors d'une mesure : variabilités du phénomène et de l'acte de mesure (facteurs liés à l'opérateur, aux instruments, etc.).
Incertitudes et notions associées	Évaluer et comparer les incertitudes associées à chaque source d'erreur. Évaluer l'incertitude de répétabilité à l'aide d'une formule d'évaluation fournie. Évaluer l'incertitude d'une mesure unique obtenue à l'aide d'un instrument de mesure. Évaluer, à l'aide d'une formule fournie, l'incertitude d'une mesure obtenue lors de la réalisation d'un protocole dans lequel interviennent plusieurs sources d'erreurs.
Expression et acceptabilité du résultat	Maîtriser l'usage des chiffres significatifs et l'écriture scientifique. Associer l'incertitude à cette écriture. Exprimer le résultat d'une opération de mesure par une valeur issue éventuellement d'une moyenne et une incertitude de mesure associée à un niveau de confiance. Évaluer la précision relative. Déterminer les mesures à conserver en fonction d'un critère donné. Commenter le résultat d'une opération de mesure en le comparant à une valeur de référence. Faire des propositions pour améliorer la démarche.

ANNEXE 6 : Mesure de la vitesse du son

Énoncé élèves

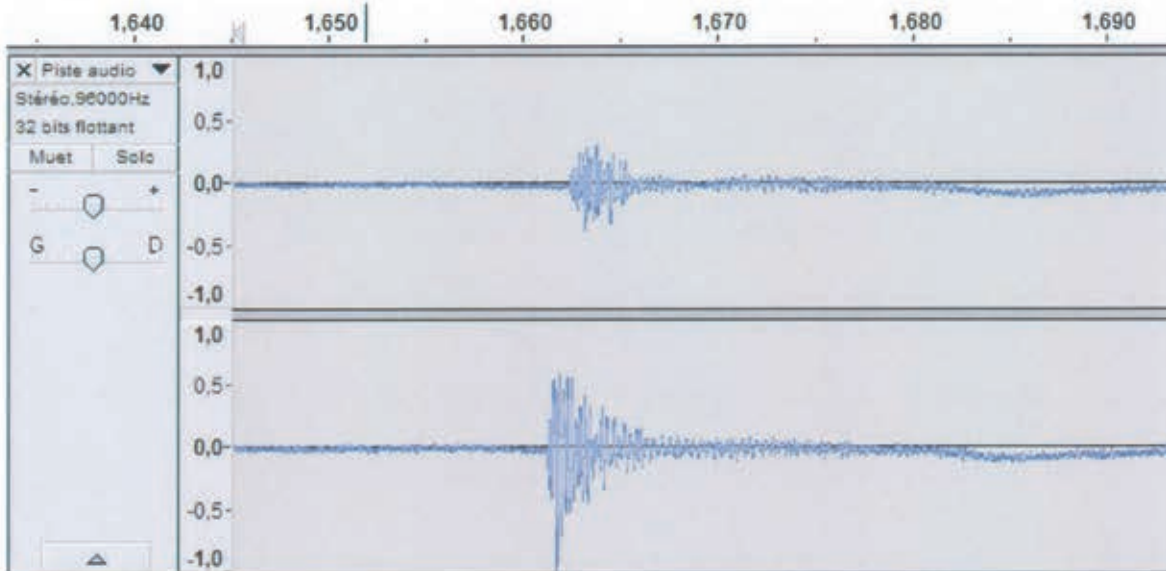
Pour mesurer la vitesse de propagation du son, on utilise une paire d'écouteurs de smartphone branchée sur la prise microphone de l'ordinateur et le logiciel Audacity®. Il suffit de séparer les deux écouteurs d'une distance connue, d'émettre un son face à l'un d'eux et de mesurer avec quel retard (après quelle durée) il parviendra au second écouteur.

La vitesse de propagation du son se calcule à partir de la distance qui sépare les deux écouteurs et de la durée que met le son pour se propager du premier écouteur au second.

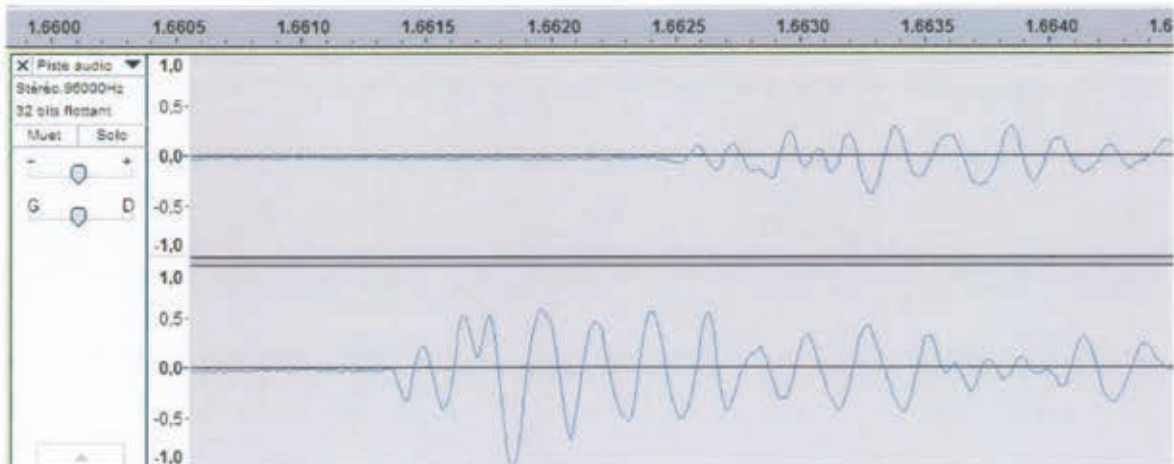
Pour utiliser le logiciel Audacity®, un tutoriel est disponible.

- 1) Écarter les écouteurs d'une certaine distance d . Mesurer cette distance.
- 2) Utiliser le logiciel Audacity pour enregistrer un bruit sec.
- 3) Déterminer la durée qui sépare la perception du bruit par le premier puis le second écouteur.
- 4) En déduire la vitesse du son dans l'air.

Un groupe d'élèves obtient l'enregistrement suivant en écartant les écouteurs de 40 cm (l'unité de l'axe horizontal est la seconde) :



Après avoir zoomé, le groupe obtient la figure suivante :



Extrait du programme de physique-chimie, cycle 4 :

Des signaux pour observer et communiquer

Connaissances et compétences associées

Signaux sonores

Décrire les conditions de propagation d'un son.
Relier la distance parcourue par un son à la durée de propagation.

- » Vitesse de propagation.
- » Notion de fréquence : sons audibles, infrasons et ultrasons.

Exemples de situations, d'activités et d'outils pour l'élève

Les exemples abordés privilégient les phénomènes naturels et les dispositifs concrets : tonnerre, sonar...
Les activités proposées permettent de sensibiliser les élèves aux risques auditifs.

Extrait du programme de mathématiques, cycle 4 :

Thème B - Organisation et gestion de données, fonctions

Connaissances et compétences associées

Exemples de situations, d'activités et de ressources pour l'élève

Résoudre des problèmes de proportionnalité

Reconnaître une situation de proportionnalité ou de non-proportionnalité.

Étudier des relations entre deux grandeurs mesurables pour identifier si elles sont proportionnelles ou non [...]

Thème C - Grandeurs et mesures

Connaissances et compétences associées

Exemples de situations, d'activités et de ressources pour l'élève

Calculer avec des grandeurs mesurables ; exprimer les résultats dans les unités adaptées

Mener des calculs impliquant des grandeurs mesurables, notamment des grandeurs composées, en conservant les unités.
Vérifier la cohérence des résultats du point de vue des unités.
» Notion de grandeur produit et de grandeur quotient. [...]

Identifier des grandeurs composées rencontrées en mathématiques ou dans d'autres disciplines (par exemple, aire, volume, vitesse, allure, débit, masse volumique, concentration, quantité d'information, densité de population, rendement d'un terrain). [...]